

# Simulare numerică pentru problema Stefan inversă

Viorel Arnăutu, Gina Dura, Răzvan Ștefănescu  
Universitatea "Al. I. Cuza" Iasi  
Facultatea de Matematică

## Introducere

Scopul lucrării este acela de a realiza teste numerice pentru problema Stefan inversă. Modelul matematic este o problemă de control optimal și se vizează conducerea unui proces de solidificare (topire) în concordanță cu anumiți parametri prescriși. Se consideră cazul problemei cu o fază, tratat cu o metodă cu domeniu necilindric și cazul problemei cu două faze, tratat cu domeniu cilindric. În ambele situații spațiul este 1D.

## I. Problema Stefan cu o fază în cazul unidimensional

Fie  $a < b < c$  și  $T > 0$ ,  $\Omega = (a, c)$ ,  $\Gamma_1 = \{c\}$  și  $\Gamma_2 = \{a\}$ .

Fie  $x = s(t)$  ecuația frontierei libere astfel încât  $s(0) = b$ .

Temperatura  $\theta(t, x)$  satisface următoarele ecuații:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad s(t) < x < c \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, c) + \alpha \theta(t, c) = -v(t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, s(t)) = \rho s'(t), \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad x \in [b, c] \quad (4)$$

Aici  $\alpha \geq 0$  si  $\rho > 0$  sunt constante date, iar  $\theta_0$  este o funcție dată astfel încât :

$$\theta_0(x) \leq 0, \quad \forall x \in [b, c].$$

La momentul  $t = 0$  segmentul de lichid  $\Omega_2(0)$  este  $[a, b]$ , segmentul de solid  $\Omega_1(0)$  este  $[b, c]$ , iar punctul  $b$  reprezintă interfața. Funcția  $v$  corespunde temperaturii mediului înconjurător în punctul  $x = c$  și este manipulată de un sistem de răcire descris de ecuația:

$$\begin{cases} v'(t) + \gamma v(t) = u(t), & a.p.t. t \in [0, T] \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Aici  $\gamma \geq 0$  este constantă, iar  $u(t) \in [0, R]$  reprezintă consumul de combustibil.

## Problema Stefan inversă și problema de control optimal corespunzătoare

Fie  $x = l(t)$  o funcție monoton descrescătoare de clasă  $C^1[0, T]$ , astfel încât  $l(0) = b$  și

$$Q = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega; l(t) < x < c\}$$

Problema Stefan inversă poate fi formulată după cum urmează: să se determine controlul  $u$  ce aparține unei mulțimi admisibile de controale

$$U = \{u \in L^\infty(0, T); 0 \leq u(t) \leq R \text{ a.p.t. } t \in [0, T]\}$$

astfel încât curba data  $l = s$  să fie interfața dintre cele două faze.

Temperatura  $y(t, x)$  trebuie să satisfacă ecuațiile (1)-(4):

$$y_t(t, x) - y_{xx}(t, x) = 0 \quad , \quad [t, x] \in Q \quad (6)$$

$$y_x(t, c) + \alpha y(t, c) = -v(t), \quad t \in [0, T] \quad (7)$$

$$y_x(t, l(t)) = \rho l'(t) \quad , \quad t \in [0, T] \quad (8)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad , \quad x \in [b, c] \quad (9)$$

Pe frontiera ce separă cele două faze,  $y$  satisface:

$$\{(t, x); y(t, x) = 0\} \text{ (vezi figura 1)}$$

Rezultatele de existența si regularitate pentru problema (6)-(9) sunt bine cunoscute. De exemplu, dacă  $v \in H^1(0, t; L^2(\Gamma))$  și  $y_0 \in H^1(\Omega)$ , atunci soluția  $y \in H^1(Q)$  este unică(vezi [4]).

Pentru orice  $u \in U$ , fie  $y_u$  solutia problemei (5)-(9). Problema Stefan inversă poate fi formulată în funcție de  $y$  după cum urmează: să se determine  $u \in U$  astfel încât

$$y_u(t, l(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (10)$$

Metoda celor mai mici pătrate ne conduce la problema de control optimal :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_0^T y_u^2(t, l(t)) dt, u \in U \right\}.$$

Controlul este consumul de combustibil  $u$ , starea este temperatura  $y$  și sistemul de stare este dat de ecuațiile (4)-(9).

**Propozitie:** Problema de control optimal (P) admite cel puțin o soluție  $u^* \in U$ . (vezi [7], p. 50-51, vezi [2]).

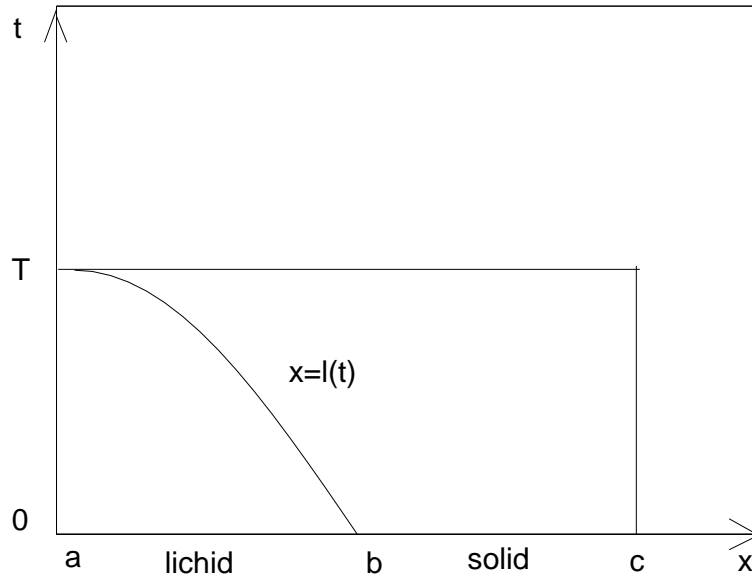


Figure 1

Condiții necesare de optimalitate:

Fie  $(u, v, y)$  perechea corespunzătoare sistemului de stare și  $(u + \lambda w, v + \lambda \theta, y + \lambda z)$  perechea corespunzătoare sistemului în variație. Prin scădere obținem ecuațiile următoare:

$$z_t(t, x) - z_{xx}(t, x) = 0 \quad , \quad [t, x] \in Q \quad (11)$$

$$z_x(t, c) + \alpha z(t, c) = -\theta(t), \quad t \in [0, T] \quad (12)$$

$$z_x(t, l(t)) = 0 \quad , \quad t \in [0, T] \quad (13)$$

$$z_0(x) = 0 \quad , \quad x \in [b, c] \quad (14)$$

Din (5) avem că:

$$\begin{cases} \theta'(t) + \gamma \theta(t) = w(t), \text{ a.p.t. } t \in [0, T] \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Introducem funcționala de cost:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T y_u^2(t, l(t)) dt + I_U(u), \quad (16)$$

unde  $I_U$  este funcția indicatoare mulțimii  $U$ . Fie  $u$  controlul optimal pentru problema (P). Așadar avem:

$$\frac{J(u + \lambda w) - J(U)}{\lambda} \geq 0 \text{ pentru } \lambda > 0$$

Utilizând formula (16) și pentru  $\lambda \rightarrow 0$  obținem

$$\int_0^T y(t, l(t)) z(t, l(t)) dt + I'_U(u, w) \geq 0, \quad (17)$$

pentru orice  $w \in L^2(0, T)$

Introducem sistemul adjuncț:

$$p_t(t, x) + p_{xx}(t, x) = 0, \quad [t, x] \in Q \quad (18)$$

$$p_x(t, c) + \alpha p(t, c) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (19)$$

$$p_x(t, l(t)) - p(t, l(t)) l'(t) = y(t, l(t)), \quad t \in [0, T] \quad (20)$$

$$p(T, x) = 0, \quad x \in [a, c] \quad (21)$$

Existența și unicitatea soluției  $p \in C(0, T; L^2(\Omega))$  este cunoscută .

Înmulțim (11) cu  $p$  și integrăm peste  $Q$ . Folosind ecuația (13) obținem:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{l(t)}^c z_t p \, dx \, dt - \int_0^T \int_{l(t)}^c p_{xx} z \, dx \, dt - \\ & - \int_0^T [z_x(t, c) p(t, c) - z(t, c) p_x(t, c) + z(t, l(t)) p_x(t, l(t))] dt = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned} \int_{l(t)}^c z_t p \, dx &= \frac{d}{dt} \left( \int_{l(t)}^c z p \, dx \right) - \int_{l(t)}^c z p_t \, dx + z(t, l(t)) p(t, l(t)) l'(t) \\ & \int_0^T (z(t, c) p_x(t, c) - z_x(t, c) p(t, c)) dt - \\ & - \int_0^T z(t, l(t)) p_x(t, l(t)) dt + \int_0^T z(t, l(t)) p(t, l(t)) l'(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Folosind ecuațiile (12),(19),(20) obținem:

$$\int_0^T p(t, c)\theta(t)dt = \int_0^T y(t, l(t))z(t, l(t))dt$$

Din (17) și din ecuația de mai sus avem:

$$\int_0^T p(t, c)\theta(t)dt + I'_U(u, w) \geq 0, \quad \forall w \in L^2(0, T).$$

Dar soluția problemei (15) este:

$$\theta(t) = \int_0^t e^{\gamma(s-t)}w(s)ds,$$

formulă ce conduce la:

$$\int_0^T p(t, c) \left( \int_0^t e^{\gamma(s-t)}w(s)ds \right) dt + I'_U(u, w) \geq 0, \quad \forall w \in L^2(0, T).$$

Pe de altă parte :

$$\int_0^T p(t, c) \left( \int_0^t e^{\gamma(s-t)}w(s)ds \right) dt = \int_0^T \left( \int_t^T e^{\gamma(t-s)}p(s, c)ds \right) w(t)dt,$$

de unde:

$$\int_0^T q(t)w(t)dt + I'_U(u, w) \geq 0, \quad \forall w \in L^2(0, T),$$

cu  $q(t) = \int_t^T e^{\gamma(t-s)}p(s, c)ds$ . Cu ajutorul acestui rezultat obținem:

$$\int_0^T q(t)(v(t) - u(t))dt \geq 0, \quad \forall v \in U.$$

**Propozitie:** Controlul optimal  $u$  pentru problema  $(P)$  satisface

$$u(t) = \begin{cases} R, & q(t) < 0 \\ 0, & q(t) > 0 \end{cases},$$

a.p.t.  $t \in [0, T]$ , unde  $R$  este cel din definiția lui  $U$ .

Propoziția de mai sus aigură faptul ca  $u$  este un control de tip bang-bang. Folosind un algoritm de tip Rosen, am obținut următorul algoritm descendent pentru problema (P).

**Algoritm:**

S0: Se alege  $u^{(0)}$ ; se fixează  $k=0$ .

S1: Se calculează  $v^{(k)}$  din (5):

$$\begin{cases} v_t^{(k)} + \gamma v^{(k)} = u^{(k)}, & t \in [0, T], \\ v^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$

S2: Se calculează  $y^{(k)}$  din (6),(7),(8),(9) astfel:

$$\begin{aligned} y_t^{(k)}(t, x) - y_{xx}^{(k)}(t, x) &= 0, & [t, x] \in Q \\ y_x^{(k)}(t, c) + \alpha y^{(k)}(t, c) &= -v^{(k)}(t), & t \in [0, T] \\ y_x^{(k)}(t, l(t)) &= \rho l'(t), & t \in [0, t] \\ y^{(k)}(0, x) &= y_0(x), & x \in [b, c] \end{aligned}$$

S3: Se calculează  $p^{(k)}$  din (18),(19),(20),(21) astfel:

$$\begin{aligned} p_t^{(k)}(t, x) + p_{xx}^{(k)}(t, x) &= 0, & [t, x] \in Q \\ p_x^{(k)}(t, c) + \alpha p^{(k)}(t, c) &= 0, & t \in [0, T] \\ p_x^{(k)}(t, l(t)) - p^{(k)}(t, l(t))l'(t) &= y^{(k)}(t, l(t)), & t \in [0, T] \\ p^{(k)}(T, x) &= 0, & x \in [a, c] \end{aligned}$$

S4: Se calculează  $q^{(k)}$  din:

$$q^{(k)}(t) = \int_t^T e^{\gamma(t-s)} p^{(k)}(s, c) ds, \quad \text{pentru } t \in [0, T].$$

S5: Se calculează  $w^{(k)}$  din:

$$w^{(k)}(t) = \begin{cases} R, & q^{(k)}(t) < 0 \\ 0, & q^{(k)}(t) \geq 0 \end{cases},$$

pentru  $t \in [0, T]$ .

S6: Se calculeaza  $\lambda_k \in [0, 1]$ , ce reprezintă soluția următoarei probleme de minimizare:

$$\min \left\{ \Phi(\lambda u^{(k)} + (1 - \lambda)w^{(k)}); \lambda \in [0, 1] \right\},$$

unde  $\Phi$  este funcționala de cost corespunzătoare problemei (P):

$$\Phi(u) = \int_0^T y_u^2(t, l(t)) dt,$$

iar  $y_u$  reprezintă starea corespunzătoare controlului  $u$ .

Se alege  $u^{(k+1)} = \lambda_k u^{(k)} + (1 - \lambda_k) w^{(k)}$ .

S7: Criteriul de oprire: Dacă  $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon$ , atunci algoritmul se oprește. Dacă nu,  $k = k + 1$  și se reia tot procedeul de la pasul S1(  $\varepsilon$  este precizia dorită ).

Dacă intenționăm să calculăm un control suboptimal de tip bang-bang, atunci pasul S6 al algoritmului trebuie modificat. Se observă cu ușurință că o combinație convexă de funcții de tip bang-bang nu este de tip bang-bang. Printr-o funcție de tip bang-bang înțelegem :

$$\varphi : [0, T] \rightarrow [0, R], \quad \text{cu } \varphi(t) \in \{0, R\} \quad \forall t \in [0, T].$$

Un punct în care  $\varphi$  își schimbă valoarea se numește punct de schimbare. Pentru a păstra  $u^{(k+1)}$  de tip bang-bang, vom folosi la pasul S5 o combinație convexă între punctele de schimbare ale funcțiilor  $u^{(k)}$  și  $w^{(k)}$  ( vezi [5], [7]).

## Implementarea algoritmului și rezultatele numerice obținute

Testele numerice au fost facute cu următoarele valori:  $T = 1, a = 0, b = 1, c = 2, \alpha = 1, \rho = 1, \gamma = 1, 3, l(t) = 1 - t, N = 61, M = 31, y_0(x) = (1 - x)(2 - x)$ .

Am folosit metoda diferențelor finite pentru discretizare, iar rețeaua de noduri echidistante este:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = c, \quad b = x_{n+1}, \quad N = 2n + 1, \\ 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_M, \\ x_j = a + (j - 1)dx, \quad j = 1, \dots, N \quad dx = (c - a)/2n, \\ t_i = (i - 1)dt, \quad i = 1, \dots, M \quad dt = T/(M - 1). \end{array} \right.$$

Datorită geometriei domeniului, pentru orice  $t_i$ , am luat în calcul doar acele valori ale lui  $y$  pentru care  $l(t_i) \leq x \leq c$ . (alegerea lui  $N$  și  $M$  nu a fost deloc întâmplătoare).

Funcția  $v$  de la pasul S1 se obține după următoarea formulă:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) = \int_0^t e^{\gamma(s-t)} u(s) ds = e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} u(s) ds, \quad t \in [0, T] \\ V[i] = e^{-\gamma t_i} \int_0^{t_i} e^{\gamma s} u(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, M, \end{array} \right.$$

unde  $V(i) = v(t_i)$ . Pentru aproximarea integralei am folosit metoda trapezelor.

La pasul S2, problemă parabolică a fost rezolvată cu ajutorul unui algoritm de timp ascendent. Am folosit o schemă standard implicită. În urma discretizării ecuațiilor (6),(7),(8),(9) am obținut un sistem algebric liniar tridiagonal. Soluția sistemului a fost obținută folosindu-se o metodă standard directă.

La pasul S3 avem de rezolvat sistemul adjunct (18),(19),(20),(21). În acest caz am folosit un algoritm de timp descendent. Discretizarea sistemului a condus la un sistem de ecuații ce are aceeași structură ca sistemul obținut la pasul 2.

Funcția  $q$  de la pasul S4 se calculează după cum urmează:

$$q(t_i) = e^{\gamma t_i} \int_{t_i}^T e^{-\gamma s} p(s, c) ds \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Rutina numerică folosită a fost aceeași ca la pasul S1. Pasul S5 este ușor de de programat.

Am menționat deja că o combinație convexă de funcții de tip bang-bang nu este o funcție bang-bang. Astfel, la pasul S6 vom utiliza combinații convexe de puncte de schimbare corespunzătoare funcțiilor  $u^{(k)}$  și  $w^{(k)}$ . Pentru asta, vom introduce o structură fixă de puncte de schimbare  $\tau_i$  astfel:

$$\tau_1 = t_1; \quad \tau_i = (t_{i-1} + t_i)/2, \quad i = 2, \dots, M; \quad \tau_{M+1} = t_M;$$

Funcția control  $u : [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$  este definită după cum urmează:

$$u(t) = u(t_i), \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

Practic, pentru un control de tip bang-bang dat, punctele de schimbare reprezintă singurele puncte în care  $u$  își poate schimba valoarea. Mai departe, procesul de minimizare este realizat folosindu-se un număr finit de valori pentru  $\lambda$ . Valorile functionalei de cost sunt calculate cu ajutorul aceleiași rutine folosite la pasul 1.

## Rezultate numerice

A fost dificil să găsim un control potrivit  $u^0$  pentru pasul S0. Am folosit două strategii în încercarea noastră:

- 1). control constant de forma  $u(t) = R, \quad \forall t \in [0, T]$ ;
- 2). control alternant de forma:

$$u(t) = \begin{cases} R, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 0, & t \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}) \end{cases},$$

cu  $i=1,3,5,\dots$



| r  | R=2 <sup>r</sup> | Φ-control constant | Φ-control alternant |
|----|------------------|--------------------|---------------------|
| 0  | 1                | 0.96239            | 0.98612             |
| 1  | 2                | 0.9159             | 0.96243             |
| 2  | 4                | 0.82662            | 0.91597             |
| 3  | 8                | 0.66289            | 0.82675             |
| 4  | 16               | 0.39481            | 0.66314             |
| 5  | 32               | 0.09611            | 0.39518             |
| 6  | 64               | 0.44853            | 0.09639             |
| 7  | 128              | 4.95267            | 0.44727             |
| 8  | 256              | 29.15815           | 4.94288             |
| 9  | 512              | 138.35798          | 29.10950            |
| 10 | 1024             | 599.91304          | 138.14435           |

Am făcut mai multe încercări iar rezultatele obținute se găsesc în tabelul de mai sus.

Am remarcat, că odată cu creșterea cantității de combustibil R, se modifică și poziția frontierei libere. Astfel faza solidă se apropie de frontiera dorită. Pentru R=1024, aproape tot domeniul Q (exceptând 2 noduri) devine solid, dar trebuie reamintit că luăm în calcul doar o singură fază. Mai mult, odată cu creșterea cantității de carburant, valorile lui  $y$  pe frontiera dorită cresc. Acest fapt conduce la creșterea funcționalei de cost  $\Phi$  după cum se observă și în tabel.

Am încercat să găsim valori mai bune pentru  $\Phi$ . Am folosit metoda Azimuth Mark în raport cu R. Atât pentru control constant cât și pentru control alternant procedura a fost aplicată: s-au localizat cele mai mici valori ale lui  $\Phi$ , iar valorile R corespunzătoare au fost notate prin  $r_1$  și  $r_2$  ( $r_1 = 16, r_2 = 32$  pentru control constant,  $r_1 = 32, r_2 = 64$  pentru control alternant). Pentru pornirea algoritmului Azimuth Mark, am folosit centru  $(r_1 + r_2)/2$ , extremitățile  $r_1$  și  $r_2$  și raza  $|r_2 - r_1|/2$ .

Am obținut următoarele rezultate:

- 1). control constant: după 21 de iterații Azimuth Mark,  $R = 39.09375$  și

$$\Phi(u^{(0)}) = 0.0649.$$

- 2). control alternant: după 23 de iterații Azimuth Mark,  $R = 78.2421875$  și

$$\Phi(u^{(0)}) = 0.06508.$$

Rezultatele obținute în urma algoritmului Rosen:

- 1). control constant: după 2 iterații

$$u(t) = \begin{cases} 39.09375 & , t \in [0, 0.45491) \\ 0 & , t \in [0.45491, 1] \end{cases},$$

$$w(t) = \begin{cases} 39.09375 & , t \in [0, 0.51666) \\ 0 & , t \in [0.5166, 1] \end{cases},$$

Valoarea optimală corespunzătoare este  $\Phi^* = 0.05758$ . În Figura 2 găsim soluția optimală obținută.

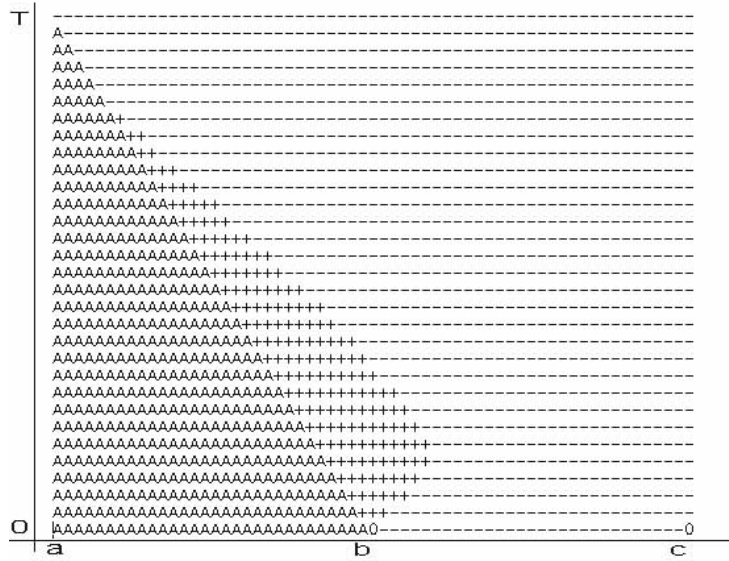


Figura 2

2). control alternant: după 3 iterații am obținut următorul control optimal:

$$u(t) = \begin{cases} 78.2421875 & , t \in [0, 0.153) \\ 0 & , t \in [0.153, 0.729) \\ \text{alternant} & , t \in [0.729, 1] \end{cases} ,$$

$$w(t) = \begin{cases} 78.2421875 & , t \in [0, 0.216) \\ 0 & , t \in [0.216, 0.65) \\ 78.2421875 & , t \in [0.65, 0.983) \\ 0 & , t = 1 \end{cases} ,$$

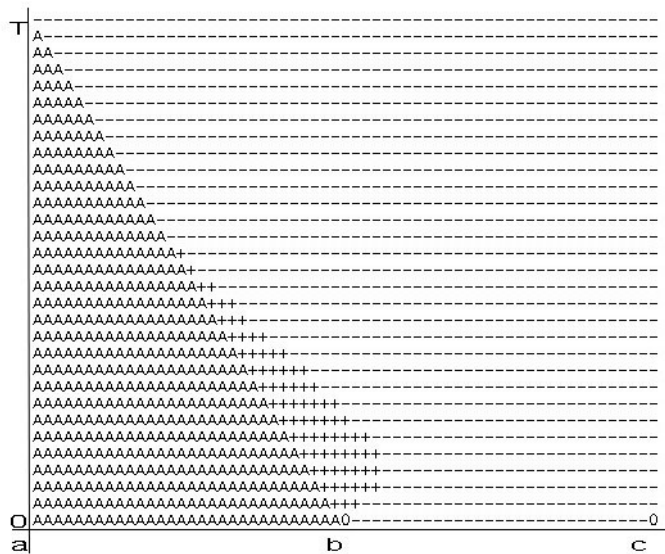


Figura 3

Valoarea optimală corespunzătoare este  $\Phi^* = 0.01677$ . În Figura 3 găsim soluția optimală obținută.

Numărul de iterații necesar algoritmului Rosen a fost foarte mic, datorită algoritmului Azimuth Mark folosit la pasul S0. De asemenea, de reținut că algoritmul Rosen modifică structura de puncte de schimbare a controlului  $u^{(0)}$ .

## II. Problema Stefan cu două faze în cazul unidimensional

Procesul fizic este descris în prima parte a lucrării. De data aceasta, evoluția temperaturii în faza lichidă este luată în considerare. Ecuațiile corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_1}{\partial t}(t, x) - \chi_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad t \in [0, T], \quad a < x < s(t), \\
\frac{\partial \theta_2}{\partial t}(t, x) - \chi_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad t \in [0, T], \quad s(t) < x < c, \\
\theta_1(t, s(t)) &= \theta_2(t, s(t)), \quad t \in [0, T] \\
\chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(t, s(t)) - \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(t, s(t)) &= -\rho s'(t), \quad t \in [0, T] \\
s(0) &= b \\
\theta_i(0, x) &= \theta_0(x), \quad x \in [a, b], \quad i = 1, 2, \\
\frac{\partial \theta_1}{\partial x}(t, a) &= 0, \quad t \in [0, T] \\
\alpha \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(t, c) + \theta_2(t, c) &= -v(t), \quad t \in v(t)
\end{aligned}$$

Aici  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  sunt constante pozitive și  $\theta_0 \in C^1[a, c]$  este o funcție dată, astfel încât:

$$\begin{cases} \theta_0(x) \geq 0 & x \in [a, b] \\ \theta_0(x) \leq 0 & x \in [b, c] \end{cases}$$

Sistemul de răcire  $v$  satisface ecuația (5). Se știe că problema de mai sus este echivalentă cu (vezi [6]):

$$(\beta(y))_t - y_{xx} = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (a, c) \quad (23)$$

$$y_x(t, a) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (24)$$

$$\alpha y_x(t, c) + y(t, c) = -w(t), \quad t \in [0, T] \quad (25)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in [a, c] \quad (26)$$

unde

$$y = \begin{cases} \chi_1 \theta_1, & y \geq 0, \\ \chi_2 \theta_2, & y < 0, \end{cases}$$

$$y_0 = \begin{cases} \chi_1 \theta_0, & x \in [a, b], \\ \chi_2 \theta_0, & x \in [b, c], \end{cases}$$

$w = \chi_2 v$  și  $\beta : \mathfrak{R} \rightarrow 2^{\mathfrak{R}}$  este o multifuncție dată prin:

$$\beta(r) = \begin{cases} r/\chi_1, & r \geq 0, \\ [-\rho, 0], & r = 0, \\ r/\chi_2 - /r, & r < 0. \end{cases}$$

Ecuția suprafeței ce separă cele două faze este dată de:  $\{(t, x); y(t, x) = 0\}$

Dacă comparăm acest model cu cel din prima parte, observăm ca domeniul  $Q$  este cilindric ceea ce reprezintă un avantaj. În schimb, multifuncția  $\beta$  este dificilă de manevrat. Vom începe cu un rezultat de existență și unicitate pentru problema (23),(24),(25),(26). Vom considera o problema mai generală:

$$\begin{aligned} (\beta(y))_t - \Delta y &= f, \text{ pe } Q = (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v_1, \text{ pe } \Sigma_1 = (0, T) \times \Gamma_1, \\ \alpha \frac{\partial y}{\partial \nu} + y &= v_2, \text{ pe } \Sigma_2 = (0, T) \times \Gamma_2, \\ y(0, x) &= y_0(x), \text{ } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{27}$$

Aici  $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ , cu  $\Omega_1$  și  $\Omega_2$  mulțimi deschise din  $\mathfrak{R}^n$ , cu frontierele netede  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$ ;  $\beta$  este funcția introdusă mai sus,  $f \in L^2(Q)$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $v_i \in L^2(\Sigma_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sunt funcții date. În cazul particular  $n = 1$  avem  $\Omega_1 = \Omega_2 = (a, c)$ ,  $\Gamma_1 = \{a\}$ ,  $\Gamma_2 = \{c\}$ .

Definim operatorul  $A : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$  astfel:

$$(Ay, z) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla z dx + \alpha^{-1} \int_{\Gamma_2} y z d\sigma, \quad \forall y, z \in H^1(\Omega)$$

și  $f \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'$  prin:

$$(f(t), z) = \int_{\Gamma_1} v_1(t, \sigma) z(\sigma) d\sigma + \alpha^{-1} \int_{\Gamma_2} v_2(t, \sigma) z(\sigma) d\sigma \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Astfel rescriem problema (27) în funcție de  $A$  și  $f$ :

$$\begin{cases} (\beta(y))_t + Ay(t) = f(t), & a.p.t. \ t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \tag{28}$$

unde  $d/dt$  este luat în sensul distribuțiilor pe  $(0, T)$ .

**Teorema 1:**

Problema (28) admite soluție unică  $y$ , ce satisface :

$$\begin{aligned} y &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \beta(y) &\in W^{1,2}(0, T; (H^1(\Omega))') \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Mai mult, dacă  $v_i \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_i))$  pentru  $i=1,2$  și  $y_0 \in H^1\Omega$ , atunci :

$$y \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap C_w(0, T; H^1(\Omega))$$

și funcția  $(v_1, v_2) \rightarrow y$  este compactă din  $W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2))$  în  $C(0, T; L^2(\Omega))$ .

Aici  $W^{1,2}(0, T; X)$ , unde  $X$  este un spațiu Hilbert real, este spațiul tuturor funcțiilor absolut continue  $\phi : [0, T] \rightarrow X$  astfel încât  $d\phi/dt \in L^2(0, T; X)$ .  $C(0, T; X)$  reprezintă spațiul tuturor funcțiilor tari continue definite pe  $[0, T] \rightarrow X$ , iar  $C_w(0, T; X)$  spațiul tuturor funcțiilor slab continue.

Teorema 1 este echivalentă cu:

Există  $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  și  $z \in W^{1,2}(0, T; (H^1(\Omega))') \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  astfel încât:

$$\begin{cases} z_t + Ay = f, & \text{a.p.t. } t \in [0, T], \\ z(0) = z_0 \in \beta(y_0), & \text{a.p.t. } x \in [0, T], \\ z(t, x) \in \beta(y(t, x)), & \text{a.p.t. } (t, x) \in Q \end{cases} \quad (29).$$

Așa cum am menționat anterior, principala problema a implementării (28) este multifuncția  $\beta$ . Avem nevoie de un rezultat de regularitate. Fie  $\beta^\varepsilon$  o funcție de clasă  $C^\infty$ , monoton crescătoare pe  $\mathfrak{R}$  astfel încât:

$$|j^\varepsilon(r) - j(r)| \leq C\varepsilon \quad \forall r \in \mathfrak{R}, \quad (30)$$

unde  $j^\varepsilon$  și  $j$  sunt primitivele lui  $\beta^\varepsilon$  și  $\beta$ , iar  $C$  o constantă. Mai mult, alegem  $\beta^\varepsilon$  astfel:

$$\frac{d\beta^\varepsilon}{dr} = \frac{d\beta}{dr}, \quad \forall r < 0.$$

Un exemplu de astfel de funcție este:

$$\beta^\varepsilon(r) = \int_{\mathfrak{R}} (\beta_\varepsilon(r - \varepsilon\theta) - \beta_\varepsilon(-\varepsilon\theta))\rho(\theta)d\theta + \beta_\varepsilon(0),$$

unde

$$\beta_\varepsilon(r) = \begin{cases} \chi_1^{-1}(r - \varepsilon) & , r \geq 2\varepsilon \\ (\rho\varepsilon^{-1} + \chi_1^{-1})(r - \varepsilon) - \rho & , r \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ \chi_2^{-1}(r - \varepsilon) - \rho & , r \leq \varepsilon \end{cases}$$

și  $\rho \in C_0^\infty(\mathfrak{R})$ , satisface condițiile de mai sus.

Introducem ecuația:

$$\begin{cases} (\beta^\varepsilon(y_\varepsilon))_t + Ay_\varepsilon = f, & t \in [0, T] \\ y_\varepsilon(0) = y_0, \end{cases} \quad (31)$$

care conform teoremei 1, admite soluție unică  $y_\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

**Teorema 2:**

Fie  $y_\varepsilon$  soluția ecuației (31). Atunci pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  avem:

$y_\varepsilon \rightarrow y$  tare în  $C(0, T; L^2(\Omega))$  și slab în  $y_\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ .

$\beta^\varepsilon(y_\varepsilon) \rightarrow z$  slab în  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  și tare în  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ , unde  $y$  satisface soluția ecuației (28) și  $z \in \beta(y)$  a.p.t.  $(x, t) \in Q$  satisface ecuația (29).

**Problema de control optimal**

Problema de control optimal corespunzătoare problemei Stefan inversă se obține cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate similar ca în prima parte.

Sistemul de stare este (23),(24),(25),(26) împreună cu ecuația sistemului de răcire:

$$\begin{cases} w'(t) + \gamma w(t) = \chi_2 u(t), & a.p.t. t \in [0, T] \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Mulțimea controalelor admisibile este :

$$U = \{u \in L^\infty(0, T); 0 \leq u(t) \leq R \text{ a.p.t. } t \in [0, T]\}$$

Reamintim că  $y_0 \in H^1(a, c)$  și

$$\begin{cases} y_0(x) \geq 0, & x \in [a, b] \\ y_0(x) < 0, & x \in [b, c] \end{cases}$$

Fie  $x = l(t)$  o funcție monoton descrescătoare de clasă  $C^1[0, T]$  astfel încât  $l(0) = b$  (vezi figura 1). Pentru fiecare  $u \in U$ , fie  $y_u \in W^{1,2}(0, T; L^2(a, c)) \cap C_w(0, T; H^1(a, c))$  soluția sistemului de stare, conform teoremei 1. Problema Stefan inversă este: să se determine  $u \in U$  astfel încât:

$$y_u(t, l(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Metoda celor mai mici pătrate ne conduce la problema de control optimal :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_0^T y_u^2(t, l(t)) dt, u \in U \right\}.$$

**Teorema 3:** Problema de control optimal (P) admite cel puțin o soluție  $u^*$ .

## Problema de control aproximantă

Mai întâi vom regulariza funcția  $\beta$ . Pentru fiecare  $\varepsilon > 0$ , fie  $y_{u,\varepsilon}$  soluția sistemului de stare (23),(24),(25),(26), unde  $\beta$  este înlocuit cu  $\beta^\varepsilon$  ce satisface (30) și problema:

$$(P_\varepsilon) \quad \inf \left\{ \int_0^T y_{u,\varepsilon}^2(t, l(t)) dt, u \in U \right\}.$$

**Teorema 3:** Există un subsir  $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$  astfel încât:

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u^* \text{ slab stelat în } L^\infty(0, T), \\ y_{\varepsilon_n} &\rightarrow y^* \text{ slab în } W^{1,2}(0, T; L^2(a, c)), \\ &\text{slab stelat în } L^\infty(0, T; H^1(a, c)), \\ &\text{tare în } C(0, T; L^2(a, c)) \cap L^2(0, T; C[a, c]), \end{aligned}$$

unde  $u^*$  este soluția problemei (P) și  $y^* = y_{u^*}$ .

## Condițiile necesare de optimalitate

**Teorema 3:** Fie  $[u_\varepsilon, y_\varepsilon]$  o pereche optimală pentru problema  $(P_\varepsilon)$ . Atunci există

$$p_\varepsilon \in C(0, T; L^2(a, c)) \cap L^2(0, T; (H^1(a, c))'), \text{ cu}$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(a, c))'),$$

soluția sistemului:

$$\begin{aligned} \nabla \beta^\varepsilon(y_\varepsilon)(p_\varepsilon)_t + (p_\varepsilon)_{xx} &= y_\varepsilon \delta(x - l(t)), \quad t \in (0, T), x \in (a, c) \\ (p_\varepsilon)_x(t, a) &= 0, \quad t \in [0, T] \\ \alpha(p_\varepsilon)_x(t, c) + (p_\varepsilon)(t, c) &= 0, \quad t \in [0, T] \\ (p_\varepsilon)(T, x) &= 0, \quad x \in (a, c) \end{aligned} \tag{32}$$

unde  $\delta$  reprezintă măsura Dirac, astfel încât

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} R, & q(t) < 0 \\ 0, & q(t) > 0 \end{cases},$$

$$q(t) = \int_t^T e^{\gamma(t-s)} p_\varepsilon(s, c) ds.$$

## Algoritm numeric

Pentru calcularea unui control (sub)optimal corespunzător problemei  $(P_\varepsilon)$ , am construit următorul algoritm numeric. Mai întâi, remarcăm că problema (32) poate fi aproximată pentru  $\lambda \rightarrow 0$  astfel

$$\begin{aligned}\nabla\beta^\varepsilon(y_\varepsilon)(p_\varepsilon)_t + (p_\varepsilon)_{xx} &= y_\varepsilon g_\lambda, \quad t \in (0, T), x \in (a, c) \\ (p_\varepsilon)_x(t, a) &= 0, \quad t \in [0, T] \\ \alpha(p_\varepsilon)_x(t, c) + (p_\varepsilon)(t, c) &= 0, \quad t \in [0, T] \\ (p_\varepsilon)(T, x) &= 0, \quad x \in (a, c),\end{aligned}$$

unde  $g_\lambda$  este o aproximare netedă pentru  $\delta(x - l(t))$ :

$$g_\lambda(t, x) = \begin{cases} \lambda^{-1} e \left[ \left( \left| \frac{x-l(t)}{\lambda} \right|^{2-1} \right)^{-1} \right], & |x - l(t)| < \lambda, \\ 0 & , |x - l(t)| \geq \lambda. \end{cases}$$

Pentru  $\forall \varepsilon, \lambda > 0$  fixat, considerăm următorul algoritm:

### Algoritm:

S0: Se alege  $u^{(0)} \in U$ ; se fixează  $k=0$ .

S1: Se calculează  $w^{(k)}$  din :

$$\begin{cases} w_t^{(k)} + \gamma w^{(k)} = \chi_2 u^{(k)}, & t \in [0, T], \\ w^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$

S2: Se calculează  $y^{(k)}$  din sistemul:

$$(\beta(y^{(k)}))_t - y_{xx}^{(k)} = 0, \quad t \in (0, T), x \in (a, c) \quad (23)$$

$$y_x^{(k)}(t, a) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (24)$$

$$\alpha y_x^{(k)}(t, c) + y^{(k)}(t, c) = -w^{(k)}(t), \quad t \in [0, T] \quad (25)$$

$$y^{(k)}(0, x) = y_0(x), \quad x \in [a, c] \quad (26)$$

S3: Se calculează  $p^{(k)}$  din sistemul:

$$\nabla\beta^\varepsilon(y^{(k)})(p^{(k)})_t + (p^{(k)})_{xx} = y^{(k)} g_\lambda, \quad t \in (0, T), x \in (a, c)$$

$$(p^{(k)})_x(t, a) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$\alpha(p^{(k)})_x(t, c) + (p^{(k)})(t, c) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$(p^{(k)})(T, x) = 0, \quad x \in (a, c).$$

S4: Se calculează  $q^{(k)}$  din:

$$q^{(k)}(t) = \int_t^T e^{\gamma(t-s)} p^{(k)}(s, c) ds, \quad t \in [0, T].$$



S5: Se calculează  $v^{(k)}$  din:

$$v^{(k)}(t) = \begin{cases} R, & q^{(k)}(t) < 0 \\ 0, & q^{(k)}(t) \geq 0 \end{cases},$$

pentru  $t \in [0, T]$ .

S6: Se calculează  $\mu_k \in [0, 1]$ , ce reprezintă soluția următoarei probleme de minimizare:

$$\min \left\{ \Phi(\mu u^{(k)} + (1 - \mu)v^{(k)}); \mu \in [0, 1] \right\},$$

unde  $\Phi$  este funcționala de cost corespunzătoare problemei ( $P_\varepsilon$ ):

$$\Phi(u) = \int_0^T y_{u,\varepsilon}^2(t, l(t)) dt.$$

Se alege  $u^{(k+1)} = \mu_k u^{(k)} + (1 - \mu_k)v^{(k)}$ .

S7: Criteriul de oprire: Dacă  $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon$ , atunci algoritmul se oprește. Dacă nu,  $k = k + 1$  și se reia tot procedeul de la pasul S1 ( $\varepsilon$  este precizia dorită).

Discuția despre funcții de tip bang-bang și despre punctele de schimbare făcută la algoritmul corespunzător problemei Stefan cu o fază, rămâne valabilă și în acest caz. De asemenea, realizarea numerică a acestui algoritm de tip Rosen este destul de apropiată cu cea descrisă de noi pentru primul algoritm.

## Rezultate numerice

Testele numerice au fost făcute cu următoarele valori:

$a = 0, b = 0.5, c = 1, T = 1, \gamma = 1.3, \alpha = 1, \varepsilon = 0.01, \lambda = 0.45, \chi_1 = 0.2, \chi_2 = 0.25, l(t) = b - t, N = 41, M = 41;$

$$\beta^\varepsilon(r) = \begin{cases} \chi_1^{-1}(r - \varepsilon) & , r \geq 2\varepsilon \\ \frac{\chi_2 - \chi_1}{\varepsilon \chi_1 \chi_2} (r - 2\varepsilon)^2 + \chi_1^{-1}(r - \varepsilon) & , r \in [\varepsilon, 2\varepsilon), \\ 2 \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 \chi_2} (r - \varepsilon) + \frac{\varepsilon(\chi_2 - \chi_1)}{\chi_1 \chi_2} & , r < \varepsilon \end{cases}$$

Am obținut următoarele rezultate:

| r  | R=2 <sup>r</sup> | $\Phi$ -control constant | $\Phi$ -control alternant |
|----|------------------|--------------------------|---------------------------|
| 0  | 1                | 0.011882                 | 0.011901                  |
| 1  | 2                | 0.011844                 | 0.011882                  |
| 2  | 4                | 0.011768                 | 0.011844                  |
| 3  | 8                | 0.011619                 | 0.011768                  |
| 4  | 16               | 0.011352                 | 0.011619                  |
| 5  | 32               | 0.011212                 | 0.011352                  |
| 6  | 64               | 0.012558                 | 0.011213                  |
| 7  | 128              | 0.021761                 | 0.012558                  |
| 8  | 256              | 0.066706                 | 0.021756                  |
| 9  | 512              | 0.268950                 | 0.066676                  |
| 10 | 1024             | 1.130536                 | 0.268804                  |

1). control constant: după 20 de iterații Azimuth Mark,  $R = 28.6875$  și

$$\Phi(u^{(0)}) = 0.011187.$$

2). control alternant: după 22 de iterații Azimuth Mark,  $R = 57.3906$  și

$$\Phi(u^{(0)}) = 0.011196$$

Rezultatele obținute în urma algoritmului Rosen:

1). control constant: după 2 iterații

$$u(t) = \begin{cases} 28.6875 & , t \in [0, 0.7625) \\ 0 & , t \in [0.7625, 1] \end{cases} ,$$

Valoarea optimală corespunzătoare este  $\Phi^* = 0.011187$ . În Figura 4 găsim soluția optimală obținută.

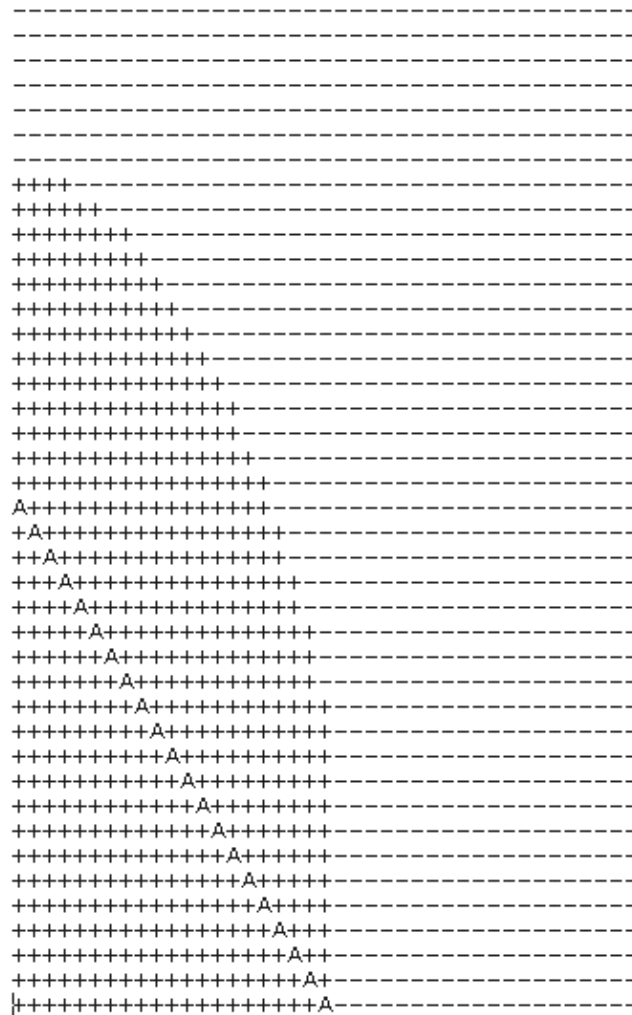


Figura 4

2). control alternant: după 5 iterații am obținut următorul control optimal:

$$u(t) = \begin{cases} 57.3906 & , t \in [0, 0.26073) \\ 0 & , t \in [0.26073, 0.44177) , \\ \textit{alternant} & , t \in [0.44177, 1] \end{cases}$$

Valoarea optimală corespunzătoare este  $\Phi^* = 0.010752$ . În Figura 5 găsim soluția optimală obținută.

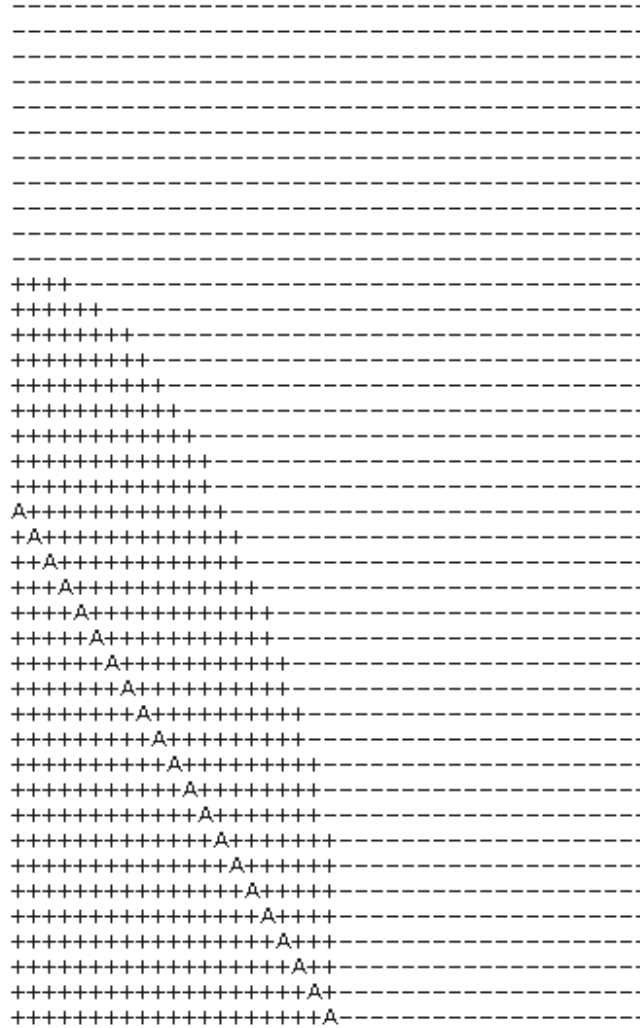


Figura 5

# Bibliografie

1. V. Arnăutu, *On approximation of the inverse one-phase Stefan Problem*. Apărut în *Numerical methods for free boundary problems* (Jyväskylä,1990), volumul 99 Internat. Schriftenreihe Numer. Math., pages 69-81, Basel. Birkhäuser, 1991
2. V. Arnăutu, V. Barbu, *Optimal control of the free boundary in a two-phase Stefan problem*. Preprint Series in Mathematics 11/1985, INCREST, Bucuresti
3. V. Arnăutu, P. Neittaanmäki, *Optimal Control from Theory to Computer Programs*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003
4. A. Fasano, M. Primicerio, *General free boundary problem for heat equation*. J. Math. Anal. Appl., 57,58,59(3,1,1):694-723,202-231,1-14, 1977
5. K. Glashoff, E. Sachs, *On theoretical and numerical aspects of the bang-bang principle*. Numer. Math, 29(1):93-113.
6. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969
7. C. Saguez, *Contrôle Optimal de systèmes à frontière libre*. Thèse, Université de Technologie de Compiègne, 1980